ТEME, г. XLI, бр. 3, јул – септембар 2017, стр. 623−637

Оригинални научни рад DOI: 10.22190/TEME1703623D
Примљено: 23. 9. 2016. UDK 371.3:514
Ревидирана верзија: 3. 4. 2017.
Одобрено за штампу: 15. 6. 2017.

ТЕОРИЈЕ РАЗВОЈА ГЕОМЕТРИЈСКОГ МИШЉЕЊА ПРЕМА ВАН ХИЛУ, ФИШБАЈНУ И УДЕМОН-КУЗНИАКУ

Оливера Ђокић*, Маријана Зељић

Универзитет у Београду, Учитељски факултет, Београд, Србија
* *olivera.djokic@uf.bg.ac.rs*

Апстракт

У раду су разматрани теоријско-педагошки оквири развоја геометријског мишљења ученика у различитим формама, посебно резоновањем ученика у настави геометрије: 1) Ван Хиловом теоријом о нивоима разумевања геометрије, 2) Фишбајновом теоријом фигуралних појмова и 3) Удемон-Кузниаковим парадигмама развоја геометријског мишљења. Циљ рада био је да анализирамо три наведена теоријска оквира и образложимо разлоге њиховог избора, а да изложене теорије сагледамо у смислу изналажења могућности прожимања и повезивања у целовиту теорију. У истраживању је коришћена дескриптивно-аналитичка и аналитичко-критичка метода теоријске анализе. Резултати истраживања показују да из сваког од три наведена теоријска оквира можемо јасно да уочимо и издвојимо геометријске објекте, док их ученици тако не виде. Они их виде уклопљене и структуриране у низу процедура, а баш из тог разлога можемо да кажемо слабо повезаних. У том смислу, отворили смо и питања за даља истраживања о геометријском објекту као важном елементу садржинског домена геометрија у оквиру наставног програма Математике.

Кључне речи: геометрија, Ван Хилов модел, Фишбајнова теорија, Удемон-Кузниакове парадигме, геометријски објекат.

THEORETICAL FRAMEWORKS OF DEVELOPMENT GEOMETRICAL THINKING ACCORDING TO VAN HIELE, FISCHBEIN AND HOUDEMENT-KUZNIAK

Abstract

This research is a pedagogical study of theoretical frameworks of development of students' geometrical thinking in various forms, particularly students' geometric reasoning in teaching geometry: 1) model of van Hieles' levels of understanding of geometry, 2) theory of figural concepts of Fischbein and 3) paradigms of Houdement-Kuzniak development of geometrical thinking. The aim of our research was to analyze the three theoretical framework and explain the reasons for their choice and expose them in terms of finding opportunities to permeate and connect them into one complete theory. The study used a descriptive-analytical and analytical-critical method of theoretical analysis. The results show that from each of the three theoretical frameworks we can clearly notice and distinguish geometric objects, as the students do not see them. They see them blended and structured in a series of procedures, and for that very reason we can say that they are poorly linked. We also opened questions for further research of geometric object as an important element for content domain geometry within mathematics curriculum..

Key words: geometry, model of van Hiele, theory of Fischbein, paradigms of Houdement-Kuzniak, geometric object.

УВОД

Када се размишља о геометрији, све више се преиспитују традиционалне позиције између њеног практичног и теоријског аспекта (BSRLM, 1998; Gutiérrez, Kuzniak, & Straesser, 2006; Dreyfus, 1990, p. 113; Kuzniak, 2014, p. 311; Марјановић и Зељић, 2006, стр. 2; Hershkowitz, 1990, p. 70; Hershkowitz, 1998, p. 29; Houdement and Kuzniak, 2003). Геометрија има два приступа: 1) конкретни – који тежи да је сведе на скуп знања о простору и практичном знању изведеном на основу материјалног света и 2) апстрактни –оријентисан ка добро организованом дискурзивном резоновању и логичком мишљењу (Kuzniak, 2014; Романо, 2009, стр. 1; Houdement et al., 2003).

Настава геометрије је по својим ефектима често мање успешна него настава аритметике или алгебре. Осврнимо се, на пример, на објављене резултате међународног тестирања ТИМСС. У два циклуса међународног тестирања – ТИМСС 2011. и ТИМСС 2015 – ученици 4. разреда основне школе из Србије први пут учествују и остварују виши ниво укупног постигнућа и боље резултате у садржинском домену *број*, али не и у садржинском домену *геометрија* (Јелић и Ђокић, 2017, стр. 68; Kadijevich, Žakelj, & Gutvajn, 2015, p. 22). ТИМСС 2011. не показује виши ниво постигнућа ученика за домен резоновање (Kadijevich et al., 2015), док резултати ТИМСС 2015. показују исти укупан просек постигнућа ученика из Србије као и у циклусу ТИМСС 2011. (Јелић и сар., 2017). Когнитивни домени према ТИМСС истраживању су знање, примена и *резоновање*, који у процесу евалуације ТИМСС тестова редом добијају 40%, 40% и 20% за 4. разред и 35%, 40% и 25% за 8. разред. Уочавамо да се домену *резоновање* све више посвећује пажња како се узраст ученика повећава и један је од примера истицања значаја овог домена у математичком образовању.

Скорија истраживања (Романо, 2009; Houdement et al., 2003) показују да су неке од препрека са којима се ученици сусрећу када уче друге математичке садржаје који нису геометријски, а које би лакше превазилазили, јесу добро знање из геометрије и добро развијено геометријско резоновање, тј. трансфер знања из геометрије у друге садржинске домене. Стога смо прво разматрали модел геометријског резоновања (расуђивања), који је веома користан за описивање и анализирање математичког резоновања ученика када уче геометријске садржаје и који је нашироко прихваћен у математичком курикулуму, на пример Сингапура (Singapur National Curriculum) и САД-а (NCTM Principles and Standards in the United States). Када кажемо модел у смислу геометријског резоновања, мислимо на Ван Хилов (van Hiele) модел. Друга концепција коју смо узимали као основу рада питање је формирања фигуралних појмова. Овај модел нам је помогао да боље разумемо процес учења, исходе и могуће грешке које настају у настави геометрије. Реч је о Фишбајновом (Fischbein) моделу формирања основних геометријских појмова. И, на крају, разматрали смо концепцију упознавања теоријских оквира који идентификују и анализирају елементе визуелизације ученика док решавају геометријске проблеме. Реч је о Удемон-Кузниаковим (Houdement-Kuzniak) парадигмама разумевања геометрије. Стога је циљ нашег рада био да анализирамо наведена три теоријска оквира развоја геометријског мишљења ученика Ван Хиловом теоријом, Фишбајновом теоријом и Удемон-Кузниаковим парадигмама, те да образложимо разлоге њиховог избора, а да при томе изложене теорије сагледамо у смислу изналажења могућности прожимања и повезивања у целовиту теорију.

МЕТОДОЛОШКИ ДЕО ИСТРАЖИВАЊА

Предмет истраживања је развој геометријског мишљења ученика у различитим формама, посебно резоновањем ученика у настави геометрије: 1) Ван Хиловом теоријом, 2) Фишбајновом теоријом и 3) Удемон-Кузниаковим парадигмама. *Циљ истраживања* је анализа три наведена теоријска оквира и образлагање разлога њиховог избора, а да се при томе изложене теорије сагледају у смислу изналажења могућности прожимања и повезивања у целовиту теорију. *Задаци* који су проистекли из постављеног циља истраживања и на које смо потражили одговор су:

1) Испитати како да осигурамо неопходан развој геометријског мишљења ученика.
2) Сагледати шта се посредством различитих теоријских оквира развоја геометријског мишљења може учинити за учење у настави геометрије, начине представљања геометријских појмова и резоновање (расуђивање) ученика.

У анализи резултата и дискусији наводимо следеће: Да бисмо дали одговор на први постављени задатак, анализирали смо три наведена теоријска оквира Ван Хилове теорије о нивоима разумевања геометрије, Фишбајнову теорију фигуралних појмова и Удемон-Кузниакове парадигме развоја геометријског мишљења. Да бисмо дали одговор на други постављени задатак, образложили смо разлоге њиховог избора, а изложене теорије сагледали у смислу изналажења могућности прожимања и повезивања у целовиту теорију. У истраживању је коришћена дескриптивно-аналитичка и аналитичко-критичка метода теоријске анализе.

Теоријски оквири учења геометрије према Ван Хилу, Фишбајну и Удемон-Кузниаку

Како се геометрија развија обухватајући разумевање различитих визуелних феномена, Удемон и Кузниак (Houdement et al., 2003) разјашњавају шта се подразумева под појмом *геометријско резоновање* (потребно за решавање геометријских проблема који укључују визуелне феномене) и како се такво резоновање одвија. Реч је о три прилично добро развијена теоријска оквира која описују и објашњавају развој геометријског резоновања ученика, који обезбеђују основе истраживачима за даља истраживања (Ђокић, 2013; Романо, 2009; Houdement et al., 2003).

Ван Хилов модел развоја геометријског резоновања ученика. Ван Хилова теорија пружа основу за разумевање дечијих развојних способности и указује на пет нивоа геометријског знања које ученик пролази од основног препознавања геометријских облика до дедуктивних доказа (Van Hiele, 1986, p. 39; Gutiérrez, 2014; Ђокић, 2014; Hershkowitz, 1990; Houdement et al., 2003). Нивои представљају хијерархијски уређен низ корака који могу да се достижу у скоковима и у највећој мери зависе од учења (а не од узраста или биолошке зрелости). Сваки ниво карактерише посебан језик, симболи и структура. Реч је о следећим нивоима:

1. Ниво 0 – ниво *визуелизације* – на основу перцепције, ученик препознаје геометријске фигуре; на пример, фигуре облика троугла, фигуре облика четвороугла, фигуре облика круга итд., али их не користи за класификације;
2. Ниво 1 – ниво *описа и анализе* – ученик индуктивно изводи закључке, на основу неколико примера, усредсређивањем на облик унутар класе; на пример, ученик промишља која својства има правоугаоник и способан је да разговара о односима између геометријских објеката и њихових особина;
3. Ниво 2 – *апстрактни или релациони* ниво или ниво *неформалне дедукције* – подразумева развој способности уопштавања (дефиниције) које укључују навођење потребног и довољног услова, као и неки вид логичке аргументације; постоји могућност да ученик класификује геометријске фигуре на основу уочавања особина;
4. Ниво 3 – ниво *формалне дедукције* – ученик може да препозна особине геометријских фигура, изводи доказе помо-

ђу исказа, аксиома и дефиниција, изводи закључке; ученик користи апстрактне појмове и изводи закључке засноване више на логици него на интуицији;

5. Ниво 4 – *ригидноматематички* ниво – могућност ученичког резоновања заснованог искључиво на аксиомама, дефиницијама и теоремама; разумевање геометријског система који није Еуклидски (на пример, систем геометрије Лобачевског, где су геометријски објекти смештени, на пример, на сфери као једном од модела, а не у равни као код Еуклидске геометрије).

Преносимо један могући систематичан преглед Ван Хилове теорије са аспекта јасног издвајања карактеристика математичког процеса према нивоима развоја геометријског мишљења и резоновања ученика (Gutiérrez, 2014) – (Табела 1).

Табела 1. Карактеристике процеса резоновања по Ван Хиловим нивоима (Gutiérrez, 2014, p. 162)

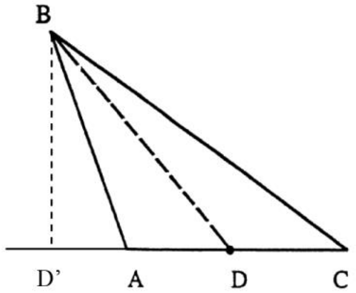
Карактеристике математичког процеса	Ниво 1	Ниво 2	Ниво 3	Ниво 4
Препознавање и опис	Физичка својства	Математичка својства	_	_
Употреба дефиниција	_	Само дефиниције једноставних структура	Било која дефиниција	Прихватање неколико различитих еквивалентних дефиниција
Формулисање дефиниција	Листа физичких својстава	Листа математичких својстава	Скуп потребних и довољних својстава	Доказивање еквивалентних дефиниција
Класификација	Заснована на физичким својствима	Заснована на математичким својствима	Дефиниције се мењају	_
Доказивање	_	Емпиријска провера путем примера	Неформални дедуктивни докази	Формални дедуктивни докази

У нижим разредима ограничавамо се, најчешће, на нивое 0 и 1 (ниво 2 у оквиру виших разреда). Хијерархијски два највиша нивоа (3 и 4) не достижу се у основној школи.

Фигурални појмови према Фишбајновој теорији. Основна теза Фишбајнове теорије фигуралних појмова (Fischbein, 1993, p. 156) јесте да се геометрија бави објектима у свести појединца (тзв. геометријским фигурама) које истовремено поседују и појмовни и фигурални (сликовни) карактер. Фишбајн именује геометријске фигуре *фигуралним појмовима* због своје двоструке природе и анализира унутрашње тензије, које могу да се појаве због двоструке природе.

Фишбајн разматра геометријску фигуру, нпр. квадрат, круг итд., описујући унутрашња појмовна својства, наглашавајући да то није цео појам, већ њега чини и слика (квадрата, круга итд.) (Fischbein, 1993). Фигура поседује својства који други појмови, нематематички, не поседују. Наиме, фигура укључује менталну репрезентацију својстава простора. Према овоме, геометријско се резоновање карактерише као *интеракција између два аспекта – сликовног (фигуралног) и појмовног.*

Са дидактичко-методичке тачке гледишта, Фишбајн предлаже да би ученици требало да се посебно оспособљавају у савладавању могућих конфликтних ситуација које настају између сликовног и појмовног аспекта геометријског појма. На пример, ученици у старијим разредима основне школе можда неће правилно нацртати висину из темена B троугла ABC (Слика 1), већ ће уместо ње нацртати тежишну дуж, упркос чињеници да знају дефиницију висине троугла.



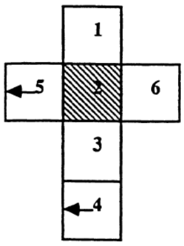
Слика 1. Проблем цртање висине троугла према Фишбајну (Fischbein, 1993, p. 154)

Ученици би требало да познају дефиницију и да реше задатак тачно према дефиницији, а *не према ономе што им се чини према слици*. Реч је о тривијалном примеру, али многи слични примери требало би да се систематично примењују у учионици, у намери да се нагласи *доминација дефиниције над сликом* у интерпретацији фигуралних појмова.

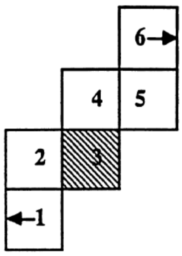
Фишбајн разматра и могућност практиковања менталних акција ученика у којима сарадња између фигуре и појма захтева посебан подухват (почетна настава геометрије). У таквим активностима ученик мора да научи да (*ментално*) *манипулише геометријским објектима*, истовремено прибегавајући операцијама са фигурама и логичким односима и операцијама. Таква врста активности се према Фишбајну састоји, на пример, од захтева упућеног ученицима да:

1. *нацртају* слику која се добије размотавањем површи геометријског тела (доживљено или ментално представљено),
2. *препознају* геометријско тело које се може добитити замишљеним склапањем дводимензионе слике и
3. *кажу* које ивице геометријског тела се могу спојити (слепити) да би тродимензиони објекат био реконструисан.

Неке од тих активности релативно су лаке, док су друге веома сложене. На пример, релативно је лако утврдити да Слика 2 представља мрежу коцке. Нешто је теже увидети (замислити) на обележеним ивицама (стране 4 и 5 обележене стрелицама) које се спајају при састављању коцке.



Слика 2. Један могући облик мреже коцке (Fischbein, 1993, p. 158)



Слика 3. Још један могући облик мреже коцке (Fischbein, 1993, p. 159)

Сложенији задатак био би да ученици препознају да Слика 3 представља развијену мрежу коцке. Такође је доста сложеније увидети да се обележене ивице (стране 1 и 6 обележене стрелицама) спајају при састављању коцке. При оваквим менталним активностима ученик не врши поунутарњење имитиране спољашње акције манипулације. То је ментална конструкција која захтева не само да се „виде” фигуре већ да ученици промене своје становиште, да замисле своју измењену позицију, да замисле промену која ће се десити када се споје суседне стране коцке. Узастопне трансформације требало би да се замисле и координишу све док се тело не састави (реконструкција коцке).

Фишбајн тумачи геометријске фигуре као менталне објекте који *истовремено* поседују појмовна и фигурална (сликовна) својства. Интеграција појмовних и фигуралних својстава у јединствену менталну структуру, са доминантним појмовним ограничењима над оним фигуралним, није природан процес. Овим је објашњено стварање адекватног јединства фигуре и појма при геометријском резоновању са доминантним формалним ограничењима и увиђање да би могуће конфликтне ситуације требало да се користе тако да се ученици оспособе да пажљиво прате захтеве дефиниције, понекад видљиво супротно оном што слика наговештава (или намеће).

Развој геометријског мишљења према парадигмама Удемон-Кузниака. Дискусије Удемона и Кузниака (Kuzniak, 2014; Houdement et al., 2003) о три парадигме разумевања геометрије дају нам основу развоја геометријског мишљења ученика. Парадигме се ослањају на Гонсетове (Gonsenth) облике знања о простору – интуицији, експерименту и дедукцији (Houdement et al., 2003) и воде нас до различитих форми геометрије:

1. *Природна геометрија – Геометрија I* – реч је о реалистичном свету чији су објекти и осећаји извори сазнања; интуиција је често асимилована непосредно после перцепције; аргументи у тврђењима ове геометрије засновани су на експерименту и дедукцијама; често се прави мала разлика између модела и реалистичног света, а тврдње настају померањем од реалистичног света до модела, и обрнуто, с циљем да се развију убедљиви аргументи у поступку доказивања; докази могу да се ослањају и на слике или запажања настала у поступку мерења или цртања помоћу прибора за цртање, нпр. лењиром и шестаром; или чак савијањем и сечењем слике на папиру; развој ове парадигме геометрије историјски је мотивисан практичним проблемима.
2. *Природно-аксиоматска – Геометрија II* – реч је о архетипу Еуклидске геометрије и дедуктивним законима аксиоматског система; изграђена је на моделу блиском реалистичности, а аксиоми су што је могуће ближи просторној интуицији; у овој парадигми геометрије објекти постоје само у дефиницијама, чак и ако се заснивају на неким карактеристикама реалистичног света и објеката у њему; обе наведене парадигме геометрија су у блиској вези са реалистичним светом, иако на различите начине.
3. *Формално-аксиоматска геометрија – Геометрија III* – чија су тврђења заснована на аксиоматском систему; мало је или скоро никако представљена у обавезном школовању; ради се о формалним и логичким закључивањима и готово да нема везе са реалистичним светом; о овој парадигми требало би да размишљају будући наставници током студирања у оквиру предмета Математика.

Илуструјмо како се геометријски објекат види у три парадигме према Удемону и Кузниаку (Табела 2).

Табела 2. Различити аспекти геометријских парадигми
(Houdement et al., 2003, p. 5)

		Геометрија I Природна геометрија	*Геометрија II* Природно-аксиоматска	*Геометрија III* Формално-аксиоматска геометрија
Компоненте парадигми	*Интуиција*	Повезана са перцепцијом, потпомогнута и подржана експериментом.	Повезана са фигурама.	Интерна, у самој математици.
	Искуство	Повезано са мерљивим простором.	Повезано са схемама.	Ослоњено на логику.
	Дедукција	Блиска реалности и повезана са експериментом.	Демонстрације засноване на аксиомима.	Демонстрације засноване на комплетном систему аксиома.
Врста простора у ком ученик учи		Интуитивни и физички простор.	Физички и геометријски простор.	Апстрактан Еуклидски простор.
Статус слике		Објекат проучавања и објекат провере.	Подржан резоновањем (расуђивањем) и ‘фигуралним појмом’.	Схема теоријског објекта, хеуристички алат.
Аспект слике (објекта) за проверу коме се придаје значај		Доказ сам по себи (очигледност) и конструкције.	Својства и демонстрација.	Демонстрација и везе међу објектима. Структура.

Једна од важних Удемон-Кузниакових идеја (Kuzniak, 2014) јесте кохерентан рад у геометрији до краја основне школе. У наставку појашњавамо шта се под овим подразумева. У Геометрији I задатак почиње конструисањем, било традиционалним или софтверским прибором. Конструкција се изводи и она је контролисана покретом и замишљањем. У концепцији Геометрије II фокус је прво на дискурсу који подржава структурирање слике и контролисања њеног настајања. У овом педагошком приступу, елементи који потичу из Геометрије I само подржавају интуицију ученика за рад у Геометрији II, водећи формирање радног простора у нову парадигму (доминатна парадигма сада постаје Геометрија II, подржана парадигмом Геометрије I). Међутим, у исто време, ученици могу да верују да раде у радном простору Геометрије I (доминатна парадигма би по овоме била Геометрија I), где је циљ да се мисли о реалистичним објектима који имају неке од особина које потичу из Геометрије II, како би се избегла директна мерења на геометријској слици. Кузниак наводи да подржава идеју да би обе геометријске парадигме требало да буду укључене у наставу основношколске геометрије како би се развио кохерентан радни простор (доминатна парадигма Геометрија I / доминантна парадигма Геометрија II), где, дакле, обе парадигме имају исти значај. Суштински важна идеја Удемон-Кузниака (Houdement et al., 2003) јесу наведена три различита приступа геометрији.

РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА О ТРИ РАЗМАТРАНА ТЕОРИЈСКА ОКВИРА УЧЕЊА ГЕОМЕТРИЈЕ

У претходним поглављима образложили смо избор теорија. Размотримо сада значења сваке од три теорије у контексту њиховог упоређивања и сумирања резултата (Houdement et al., 2003). Сваки од три теоријска оквира чини важну потпору за истраживање у геометријском образовању. Међусобно су наведене три теорије подесне и комплементарне. Дају нам теоријске оквире о учењу у геометрији, могуће начине представљања геометријских појмова и резоновања. То нису једини теоријски оквири, али су међу најзначајнијим у области истраживања геометријског образовања.

Значења теорија Ван Хила и Фишбајна и Удемон-Кузниакових парадигми. Ван Хилови нивои имају неке заједничке карактеристике: 1) сукцесивне су природе, односно јављају се у хијерархијском поретку; кретање увек значи са нижег нивоа на виши ниво; 2) нивои су локалног карактера; ово значи да ниво резоновања у једној геометријској теми не значи нужно исти ниво резоновања у другој геометријској теми; 3) сваки ниво карактерише посебан језик; ученик на различитим нивоима може да даје различита значења истом појму (Gutiérrez, 2014; Ђокић, 2013; Романо, 2009; Houdement et al., 2003; Clements & Battista, 1992). Стога нам и Табела 1 тако представља карактеристике математичког процеса по Ван Хиловим нивоима и може да послужи учитељима за давање инструкција у настави, при структурирању уџбеника, те дизајнирању тестова при провери знања ученика у области геометрије у различитим разредима.

Уведени Фишбајнов термин *фигурални појам* (Fischbein, 1993) треба да нагласи чињеницу да се ради о одређеној врсти менталног објекта. Обично *у процесу математичког открића* ученици експериментишу, прибегавају аналогијама и индуктивном доказу, манипулишући не простим сликама или чистим, формалним аксиоматским ограничењима, већ *фигуралним појмовима, унутрашњим сликама које су контролисане помоћу појмова*. Без фигуралних појмова, процеси решавања проблема и открића у настави геометрије не могу се на задовољавајући начин описати и објаснити. Слике и појмови утичу једни на друге у когнитивној активности (детета или одрасле особе), у неким ситуацијама сарађујући, а у другим супротстављањајући се. Један од главних разлога зашто су геометријске теме тако тешке теме у школским програмима јесте тај што се фигурални појмови не формирају природно према својим идеалним облицима. Стога је један од главних задатака геометријског образовања стварање различитих типова дидактичко-методичких ситуација које би систематски тражиле строгу сарадњу два наведена аспекта – до њиховог спајања у јединствен ментални објекат.

О Удемон-Кузниаковим парадигмама расправљају Панаура и Гагацис (Panaoura & Gagatsis) препознајући потешкоће на које ученици наилазе у настави геометрије и расправљајући о њима (Panaoura et al., 2010). Потешкоће се јављају у прелазу између две парадигме – од Геометрије I ка Геометрији II, односно од Природне геометрије (где су објекти стварни, материјални) ка Природно-аксиоматској геометрији (где су објекти појмови), па прогресивни прелаз из једне у другу Панаура и Гагацису сматрају и једним од основних циљева наставе геометрије (Ibid). Занимљивим сматрамо њихово запажање да се ученици и њихови учитељи нужно не налазе у истој геометријској парадигми, што може да буде основни извор потешкоћа. Тако и Бракон-Мишу (Braconne-Michoux) анализира геометријски радни простор студената будућих учитеља и дискутује о њима (Braconne-Michoux, 2013). Њено истраживање указује на то да је реч о личном простору учитеља блиском или готово идентичном геометријском радном простору ученика основне школе, што свакако није идеална позиција за наставу геометрије. Различите студије указују на то да већина курикулума основношколске геометрије, као и уџбеника и математичких задатака у настави геометрије, припада Геометрији I, док се Геометрија II јавља само повремено (Ibid).

Осврнимо се на процес формирања појма према Драјфузу (Dreyfus), који у себи садржи многе фазе, почевши од извођења операција (низа корака) у конкретним приликама (Dreyfus, 1990). Како ученику процес постаје све више познат, он сам поприма облик низа операција које сада може да изведе у мислима. Драјфус каже да се за ученика тада може рећи да је остварио *оперативно мишљење* у вези са појмом који се формира (Ibid). У фази која затим следи, ментална слика издваја се један ентитет, нови објекат. Када се то постигне, ученик је у стању да мисли о новом објекту, било динамички, као о процесу, или статички, као о објекту, што ученику омогућава да размишља о низу могућности које би се догодиле да је извршио одређену операцију или да је није извршио. У овом смислу, један од најважнијих корака у учењу математике према Драјфусу јесте *опредмећење – издвајање објекта ван процеса*. Један од основних циљева наставног програма Математике према овој идеји јесте развијање оперативног мишљења, мишљења о процесу извођења операција над објектом. Повежимо ово са објектом онако како се он третира у три наведена теоријска оквира учења геометрије.

У нашем раду централно место заузима *појам геометријски објекат*. Може се сматрати делом физичког света, али и објектом који постоји у апстрактном свету геометријских идеја, као и психолошком конструкцијом формираном у људском уму. Драјфузова идеја апстракције овде је заиста пожељна и добар је пример изналажења пута ка развоју математичког процеса мишљења (и напредног мишљења, у ком, осим апстраховања, процеси од посебног значаја су и различите репрезентације појмова, визуелизација итд.).

Из три теоријска оквира учења геометрије можемо издвојити следеће:

1. У Ван Хиловој теорији геометријски објекат посматра се кроз нивое нарастања геометријског знања, крећући се од практичне геометрије ка геометрији сложених структура. Геометријски објекат је на почетку део физичког света у нематематичкој реалности, а затим у једном моменту тај исти објекат постаје у процесу апстраховања математички и део апстрактног света геометријских идеја.
2. Осим тога, геометријски објекат може се наћи и као психолошка конструкција формирана у људском уму. Ово нас доводи до Фишбајнове идеје геометријског објекта као менталног објекта и размишљања о могућој конфликтној ситуацији између оног што око сликом неког објекта региструје и оног што је сâм објекат формиран у свести, тј. његова ментална слика. Заправо, ради се о раздвајању посебних категорија једне менталне активности.
3. У Удемон-Кузниаковим парадигмама геометријски објекат постоји у чак три паралелне форме: у првој објекат постоји у стварном простору, али има и своју слику до које се долази у процесу визуелизације интуитивном представом; у другој форми ће се помоћу експеримента који се изводи, потпомогнут интуицијом, прећи пут објекта као стварног до њему паралелне форме у виду слике помоћу конструкција и прибора за цртање; у трећој форми објекат је апстракција којом се манипулише у поступку дедуктивног доказивања.

Геометријски појам своје шире схватање има у геометријском објекту. Реч је о апстрактном објекту који геометрија проучава. Ако погледамо сваки од три наведена теоријска оквира, моћи ћемо јасно да уочимо и издвојимо геометријске објекте, док их ученици тако не виде. Они их виде уклопљене и структуриране у низу процедура, а баш из тог разлога можемо да кажемо слабо повезаних. Зато се залажемо за то да геометријски објекат према наведеним теоријским оквирима буде препознат и издвојен у наставном програму Математике, јасно га успостављајући као важан елемент садржинског домена геометрије.

ЗАКЉУЧНА РАЗМАТРАЊА

Геометријско резоновање (расуђивање) подразумева логично, систематско мишљење ученика. Оно садржи интуитивно и индуктивно резоновање ученика засновано на обрасцима и законитостима, који су алат у доласку до решења проблема постављених у новим, непознатим ситуацијама.

Отварање питања за даља истраживања о геометријском мишљењу и резоновању ученика. Гутијерез (Gutiérrez) и сарадници на Четвртом конгресу европских истраживача математичког образовања издвајају промене које се дешавају на пољу истраживања у геометрији, а које се разматрају у оквирима њиховог утицаја на развој геометријског мишљења ученика (Gutiérrez et al., 2006). Реч је о три правца промена: 1) приметно измењено подучавање у настави геометрије и залагање за отворене наставне приступе, 2) усмерен на уџбенике као носиоце образовних промена који су подршка измењеним иновативним наставним приступима и 3) усмерен је на саме учитеље, њихова знања и вештине. Значајну улогу у процесу развоја математичког мишљења (алгебарског, аритметичког, просторног и геометријског) код ученика има педагошко вођење од стране учитеља, које треба да омогући оптимални развој операције мишљења (Антонијевић, 2014, стр. 221; Ђокић, 2013). Стога отварамо питања за даља истраживања о геометријском резоновању и мишљењу ученика како би настава геометрије, још од почетне наставе, била предмет неких нових истраживања, са развојним статусом и правцима истраживања проистеклим из наведених теоријских оквира и тиме побољшала своје ефекте.

ЛИТЕРАТУРА

Антонијевић, Р. (2014). Развој математичког мишљења код ученика као аспект процеса интелектуалног васпитања [The development of mathematical thinking of students as an aspect of the process of intellectual education]. *Настава и васпитање*, *63(2)*, 215–227.

Braconne-Michoux, A. (2013). Which Geometrical Working Spaces for the Primary School Preservice Teachers? In: Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M. A. (eds.): *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (605–614). Ankara: Middle East Technical University.

BSRLM (Ed.) (1998). Geometry Working Group: Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. In: *From Informal Proceedings* (18-1&2, p. 29–34). King's College London and University of Birmingham.

Clements, D.H. & Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 420–464). New York: Macmillan Publishing Copmany.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ICMI Studies, p. 113–134). Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139013499.008

Ђокић, О. (2014). Ван Хилов модел [The model of Van Hiele]. У *Лексикон образовних термина* [Lexicon of educational terms] (стр. 76). Београд: Учитељски факултет.

Ђокић, О. (2013). *Реално окружење у почетној настави геометрије* [Realistic Mathematics in Teaching and Learning Elementary Geometry] (Doctoral dissertation). Retrieved from http://eteze.bg.ac.rs/application/showtheses?thesesId=1376

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24(2)*, 139-162. DOI: 10.1007/BF01273689

Gutiérrez, A. (2014). Geometry. In P. Andrews and T. Rowland (Eds.), *MasterClass in Mathematics Education − International Perspectives on Teaching and Learning* (p. 151–164). London: Bloomsbury.

Gutiérrez, A., Kuzniak, A. & Straesser, R. (2006). Research on geometrical thinking. In: Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (725–726). FUNDEMI IQS: Universitat Ramon Llull.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana and V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 29–37). Springer Netherlands, Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/978-94-011-5226-6

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (ICMI Studies, p. 70–95). Cambridge: Cambridge University Press. DOI: 10.1017/CBO9781139013499.006

Houdement, C. and Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In: Mariotti, M. A. (Ed.): *Proceedings of CERME 3* (1–9). Department of Mathematics of the University of Pisa.

Јелић, М. и Ђокић, О. (2017). Ка кохерентној структури уџбеника математике − анализа уџбеника према структурним блоковима ТИМСС истраживања [Towards a coherent structure of mathematics textbook −textbook analysis through structural blocks of TIMSS methodology]. *Иновације у настави*, *30(1)*, 67–81. DOI: 10.5937/inovacije1701067J

Kadijevich, Dj. M., Žakelj, A. & Gutvajn, N. (2015). Explaining Differences for Serbia and Slovenia in Mathematics Achivement in Fourth Grade. *Настава и васпитање*, *64(1)*, 21–37. DOI: 10.5937/nasvas1501021K

Kuzniak A. (2014). Understanding Geometric Work through Its Development and Its Transformations. In S. Rezat et al. (eds.), *Transformation −A Fundamental Idea of Mathematics Education* (p. 311–325). Springer Science+Business Media. DOI: 10.1007/978-1-4614-3489-4_15

Марјановић, М. М. и Зељић, М. (2006). Кроз геометрију до реалних бројева [Through geometry to real numbers]. *Настава математике*, *51(1-2)*, 2–11.

Panaoura, G. & Gagatsis, A. (2010). The Geometrical Reasoning of Primary and Secondary School Students. In: Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. & Arzarello, F. (eds.): *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (746–755). Institut National De Recherche Pédagogique.

Романо, Д. А. (2009). О геометријском мишљењу [About geometry thinking]. *Настава математике*, *54(2-3)*, 1–11.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

THEORETICAL FRAMEWORKS OF DEVELOPMENT GEOMETRICAL THINKING ACCORDING TO VAN HIELE, FISCHBEIN AND HOUDEMENT-KUZNIAK

Olivera Đokić, Marijana Zeljić
University of Belgrade, Teacher Education Faculty, Belgrade, Serbia

Summary

In this research paper we deal with the paradigms for understanding geometry that provide the basis of development of students' geometrical thinking in various forms, and geometric reasoning in teaching and learning through two important questions: 1) why is geometric reasoning recommend as an integral part of the mathematics curriculum in some county (Singapore, USA, etc.) and 2) how to promote geometrical reasoning as a goal in a set of goals in mathematics curriculum.

This is a theoretical study of three pedagogical frameworks of the development of students' thinking in geometry in various forms, particularly students' geometrical reasoning in teaching geometry: 1) model of van Hieles' levels of understanding of geometry, 2) theory of figural concepts of Fischbein and 3) paradigms of Houdement-Kuzniak development of geometrical thinking. The aim of our study was to analyze the three theoretical frameworks and explain the reasons for their choice and expose them in terms of finding opportunities to permeate and connect them into one complete theory.

Each of the three theoretical frameworks makes an important support for research in geometry education. These theories are fit and complementary. These are not the only theoretical frameworks, but they are among the most significant in geometric education research. Therefore, the characteristics of the process by van Hieles' levels can be used for teachers' instruction, or textbook structuring, or for design tests for checking students' knowledge of geometry in different grades. Fishbein points out that one of the main tasks of mathematical education (in the content domain geometry) is to create different types of didactic-methodology situations that would systematically sought strict cooperation between the two stated aspects (images and concepts), to their merger into a single mental object. Hence the notion that the idea of the work of Houdement-Kuzniak is the transition from one geometry to another (Natural Geometry, Natural Axiomatic Geometry and Formalist Axiomatic Geometry) and it recognizes these three paradigms of understanding geometry.

The results show that from each of the three theoretical frameworks we can clearly notice and distinguish geometric objects, as the students do not see them. They see them blended and structured in a series of procedures, and for that very reason we can say that they are poorly linked. We also opened questions for further research of a geometric object as an important element for content domain geometry within mathematics curriculum.